Gruppe A

1	2
8	

Aufgabe 1. (Punkte: 8)

Auf $\mathbb{R}^2$ sei als innere Verknüpfung die übliche Addition $+$ und eine spezielle äußere Verknüpfung $\circ$ definiert:

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad \circ : \left\{ \begin{array}{ccc} \overset{\mathbb{R}}{\cancel{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

A1

Ja	Nein		
☒	☐	$(\mathbb{R}^2, +)$ ist kommutative Gruppe	2
☐	☒	$\forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad (\lambda \cdot \mu) \circ v = \lambda \circ (\mu \circ v)$	2
☒	☐	$(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ ist distributiv	2
☐	☒	$\forall v \in \mathbb{R}^2: \quad 1 \circ v = v$	2

1	2
12	

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom höchstens dritten Grades, d.h. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Es gelte: $p(1) = -1$, $p(0) = 3$, $p(-1) = -1$ und $p(3) = \lambda \in \mathbb{R}$.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, c, und d auf und bestimmen Sie a, b, c und d.
Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Grad von p kleiner 3, d.h. $deg(p) < 3$?

A2 Ansatz: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ LGS 2

$$\left.\begin{array}{ll} p(1) = -1 \Rightarrow & a + b + c + d = -1 \\ p(0) = 3 \Rightarrow & \underline{d = 3} \\ p(-1) = -1 \Rightarrow & -a + b - c + d = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2b + 2d = -2 \Rightarrow \underline{b = -4} \\ 2a + 2c = 0 \Rightarrow \underline{c = -a} \end{array}$$

$p(3) = \lambda \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = \lambda \Rightarrow 27a - 36 - 3a + 3 = \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow 24a = \lambda + 33 \Rightarrow \underline{a = (\lambda + 33)/24}$ 8

grad von $p < 3 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -33}$ 2

Aufgabe 3. (Punkte: 12)

1	2
12	

Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ durch $a = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}5\\1\\\vartheta\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix}-4\\10\\1\end{pmatrix}$ (mit $\vartheta \in \mathbb{R}$).
Zeigen Sie: $\exists \vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $span(a, b) = span(c, d)$.

A3 Ansatz: $a, b \in span(c,d) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda c + \mu d = a$ bzw b

$$\Rightarrow \text{LGS} \left(\begin{array}{cc|c:c} -1 & -4 & 2 & 5 \\ 7 & 10 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \vartheta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & -18 & 18 & 36 \\ 0 & -7 & 7 & \vartheta+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta-4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underline{\vartheta = 4}$$

$\Rightarrow span(a,b) \subseteq span(c,d)$ für $\vartheta = 4$ (eindeutig) lösbar 8

Für $\vartheta = 4$ sind a und b linear unabhängig (offensichtlich)

$\Rightarrow \dim(span(a,b)) = 2 \Rightarrow span(a,b) = span(c,d)$ 4

Aufgabe 4. (Punkte: 12)

1	2
12	

Sei $0 < s \in \mathbb{R}$ und $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.
Zeigen Sie, dass M zusammen mit dem Matrixprodukt $\cdot$ eine kommutative Gruppe ist.

A4 a) M abgeschlossen, da für $\begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u & -sv \\ v & u \end{pmatrix} \in M$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & -sv \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - syv & -xsv - syu \\ yu + xv & -syv + xu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - syv & -s(xv+yu) \\ xv + yu & xu - syv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -sb \\ b & a \end{pmatrix}$$

liegt in M, d.h. $(a,b) \neq (0,0)$, da 1

Annahme: $a = xu - syv = 0 \wedge b = xv + yu = 0 \overset{a \cdot v}{\Rightarrow} xuv - syv^2 = 0 \overset{b}{\Rightarrow}$

$-yu^2 - syv^2 = 0 \Leftrightarrow y(\underbrace{u^2 + sv^2}_{\neq 0 \text{ nach Vor.}}) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xu = 0 \\ \text{und} \\ xv = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 0$ ↯ 3

b) Für $x = 1$ und $y = 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ (neutrales Element!) 2

c) Inverses Element zu $\begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} \in M$ ist (nach Formel): Für $s > 0$

$$\begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x & sy \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + sy^2} \begin{pmatrix} x & sy \\ -y & x \end{pmatrix} \in M, \text{ da } x^2 + sy^2 \neq 0$$ 4

d) Assoziativität gilt allgemein bei Matrizenprodukt 1

e) Kommutativität: 1

$$\begin{pmatrix} u & -sv \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux - svy & -uys - svx \\ vx + uy & -svy + ux \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - syv & -s(xv + yu) \\ xv + yu & xu - syv \end{pmatrix} \text{ vgl. a)}$$

1	2
10	

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

a) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{Z}_3^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3$.

b) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{C}$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$.

A5 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \underline{\underline{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}} \in \mathbb{Z}_3^3$ (4)

(Eigenvektor)

b) $\left(\begin{array}{cc|c} i & 2i & 1 \\ 2 & \alpha & i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & i \\ 2 & \alpha & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -i \\ 0 & \alpha-4 & 3i \end{array}\right)$ (2)

<u>Fall $\alpha = 4$</u> $\Rightarrow$ <u>es gibt keine Lösung</u> $(\mathbb{L} = \emptyset)$ (2)

<u>Fall $\alpha \neq 4$</u> $\Rightarrow x_2 = \frac{3i}{\alpha-4}$, $x_1 = -i - \frac{6i}{\alpha-4} = -i\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-4}\right) \Rightarrow \underline{\underline{x = \begin{pmatrix} -i\left(\frac{2+\alpha}{\alpha-4}\right) \\ \frac{3i}{\alpha-4} \end{pmatrix}}}$ (2)

1	2
18	

Aufgabe 6. (Punkte: 18)

Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.

A6

a) Stellen Sie π als Produkt paarweise elementfremder Zykel dar und berechnen Sie π^{2006}.

b) Geben Sie π^{-1} an.

c) Welche Ordnung hat die von π erzeugte Untergruppe der S_8?
☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐7 ☐8 ☒12 ☐15

d) Wie viele Transpositionen sind zur Darstellung von π mindestens notwendig?
☐2 ☐3 ☐4 ☒5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

e) Lässt sich π als Produkt von n ($n \in \mathbb{N}$) nicht notwendigerweise verschiedenen 3-Zykeln darstellen?
Achtung: falsche Antwort gibt hier (bei 6,e) Punktabzug!
☐*Ja* ☒*Nein*

---

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} = (1\,3\,4)(2\,5\,6\,7)$ (eindeutig bis auf zyklische Vertauschung) (2)

Wegen $2006 \bmod 3 = \cancel{2}006 \bmod 4 = 2006 \bmod 12 = 2$ gilt:

$\pi^{2006} = (1\,3\,4)^{2006}(2\,5\,6\,7)^{2006} = (1\,3\,4)^2(2\,5\,6\,7)^2 =$

$= (1\,4\,3)(2\,6)(5\,7)$ bzw.

$\pi^{2006} = \pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ (5)

b) $\pi^{-1} = (1\,3\,4)^2(2\,5\,6\,7)^3 = (1\,4\,3)(2\,7\,6\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ (2)

1	2
18	

Aufgabe 7. (Punkte: 18)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$.

a) Geben Sie für $Kern(f)$ und $Bild(\mathbb{R}^3)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.

(A7) a) $Kern(f) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0 \} \Rightarrow$ homogenes LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{\lambda}{3}$, $x_1 = \frac{1}{2}(-\lambda)$; Mit $\lambda = 6\mu \Rightarrow$ (3)

$Kern(f) = \{ x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \}$, $dim(Kern(f)) = 1$; $B_{Kern(f)} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ (2)

Rang(A) ‖ Basen

$dim(Bild(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Kern(f)) = 3 - 1 = 2$, $B_{Bild(f)} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ (3)

b) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 36 \\ 12 + 54 + 18 \\ -36 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 84 \\ -42 \end{pmatrix} = -14 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (3)

c) $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda id_{3\times 3}) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -9-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (4-\lambda)[(-9-\lambda)(-2-\lambda) - 36] - 6[6(-2-\lambda)] =$

$= (4-\lambda)[-18 + 11\lambda + \lambda^2] + 72 + 36\lambda$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(4 - 11) + \lambda(44 + 18 + 36) + 72 - 72$

$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 98\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda - 98)$ (4)

Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$:

$\lambda_1 = 0$ (vgl. a)!), $\lambda_2 = -14$ (vgl. b)!) $\Rightarrow \lambda_3 = -\frac{98}{-14} = 7$ (3)

oder mit Formel für quadratische Gleichung