1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 8)

Auf $\mathbb{R}^2$ sei als innere Verknüpfung die übliche Addition $+$ und eine spezielle äußere Verknüpfung $\circ$ definiert:

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \circ : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

Ja	Nein	
☐	☐	$(\mathbb{R}^2, +)$ ist kommutative Gruppe
☐	☐	$\forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad (\lambda \cdot \mu) \circ v = \lambda \circ (\mu \circ v)$
☐	☐	$(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ ist distributiv
☐	☐	$\forall v \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \circ v = v$

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom höchstens dritten Grades, d.h. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Es gelte: $p(1) = -1$, $p(0) = 3$, $p(-1) = -1$ und $p(3) = \lambda \in \mathbb{R}$.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, c, und d auf und bestimmen Sie a, b, c und d.
Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Grad von p kleiner 3, d.h. $deg(p) < 3$?

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 12)

Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ durch $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\vartheta \in \mathbb{R}$).

Zeigen Sie: $\exists \vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $span(a, b) = span(c, d)$.

1	2

Aufgabe 4. (Punkte: 12)

Sei $0 < s \in \mathbb{R}$ und $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.
Zeigen Sie, dass M zusammen mit dem Matrixprodukt $\cdot$ eine kommutative Gruppe ist.

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

a) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{Z}_3^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3$.

b) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{C}$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$.

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 18)

Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.

a) Stellen Sie π als Produkt paarweise elementfremder Zykel dar und berechnen Sie π^{2006}.

b) Geben Sie π^{-1} an.

c) Welche Ordnung hat die von π erzeugte Untergruppe der S_8?
☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐7 ☐8 ☐12 ☐15

d) Wie viele Transpositionen sind zur Darstellung von π mindestens notwendig?
☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

e) Lässt sich π als Produkt von n ($n \in \mathbb{N}$) nicht notwendigerweise verschiedenen 3-Zykeln darstellen?
Achtung: falsche Antwort gibt hier (bei 6,e) Punktabzug!
☐Ja ☐$Nein$

1	2

Aufgabe 7. (Punkte: 18)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$.

a) Geben Sie für $Kern(f)$ und $Bild(\mathbb{R}^3)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.
