Kapitel 3

Reelle Zahlen

Mit reellen Zahlen rechnen können wir im Prinzip schon.

Wir können addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Division durch Null ist nicht erlaubt!

3.1 Ergänzungen zum Rechnen: Ungleichungen und Beträge, Fallunterscheidungen

3.1.1 Die Anordnung der reellen Zahlen

Für reelle Zahlen x, y gilt entweder

$x < y$ (x ist kleiner als y) oder

$x = y$ (x ist gleich y) oder

$x > y$ (x ist größer als y).

Es gilt bei üblicher Zeichnung:

$x < y \Leftrightarrow x$ liegt auf der Zahlengeraden links von y;

$x > y \Leftrightarrow x$ liegt auf der Zahlengeraden rechts von y.

Vereinbarung:

$x \leq y :\Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.

$x \geq y :\Leftrightarrow (x > y \vee x = y)$.

Es gilt:

$x < y \Rightarrow x \leq y$

$x > y \Rightarrow x \geq y$

Die Umkehrung ist jeweils falsch!

Intervalle:

Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist

$$[a, b] := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$

das **abgeschlossene Intervall von** a **bis** b,

$$]a, b[:= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$

das **offene Intervall von a bis b**,

und entsprechend definiert man

$$[a, b[:= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\},$$

$$]a, b] := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\},$$

die **halboffenen** bzw. **halbabgeschlossenen** Intervalle.

Praktisch sind auch die Bezeichnungen:

$$[a, \infty[:= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x\},$$

$$]-\infty, b] := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\},$$

$$]a, \infty[:= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x\},$$

$$]-\infty, b[:= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < b\}.$$

3.1.2 Der Betrag

Der **Betrag von x**, in Zeichen:

$$|x|$$

ist

der Abstand des Punktes x auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt

und damit ≥ 0.

Es gilt:

$$|x - y|$$

ist der Abstand der beiden Punkte x und y auf der Zahlengeraden voneinander.

Es gilt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Kennt man y, so kennt man auch $|y|$.

$|7| = 7$; $|-4| = 4$; $|x^2| = x^2$, weil $x^2 \geq 0$.

Kennt man y nicht, und muss man trotzdem mit $|y|$ weiterrechnen, so macht man eine **Fallunterscheidung**.

$A := |x + 3| + |x - 7| =?$

Falls $x+3 < 0$, ist $x < -3$; dann ist auch $x-7 < 0$;

falls $x - 7 \geq 0$, ist $x \geq 7$; dann ist auch $x + 3 \geq 0$.

Falls $-3 \leq x < 7$, ist $x + 3 \geq 0$ und $x - 7 < 0$.

Folglich gilt:

$$A = \begin{cases} -(x+3) - (x-7) = -2x + 4 & \text{falls } x < -3 \\ (x+3) - (x-7) = 10 & \text{falls } -3 \leq x < 7 \\ x + 3 + x - 7 = 2x - 4 & \text{falls } 7 \leq x \end{cases}$$

Fallunterscheidungen hinschreiben!

Es lohnt sich!

Eine Fallunterscheidung **muss** sein:

vollständig

Eine Fallunterscheidung **soll** sein:

übersichtlich und einfach

Wichtig: Ist man in einem Fall einer Fallunterscheidung, braucht man sich um die nebengeordneten Fälle nicht zu kümmern, nur um den Fall selbst (und die übergeordneten Fälle).

Fallunterscheidungen machen das Leben einfacher, nicht schwieriger!

3.1.3 Das Rechnen mit Ungleichungen

Rechenregeln für Ungleichungen:

Addition von Ungleichungen:

mit reellen Zahlen:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \; a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

mit Ungleichungen:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \; a < b \text{ und } c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

Multiplikation von Ungleichungen:

mit reellen Zahlen:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad \forall c \in \mathbb{R}_+^* : \quad a < b \Rightarrow ac < bc$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \; \forall c \in \mathbb{R} : \; a < b \text{ und } c < o \Rightarrow ac > bc$$

mit Ungleichungen:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \;\; a < b \text{ und } c < d \text{ und } b > 0 \text{ und } c > 0$$
$$\Rightarrow ac < bd$$

Das heißt in Worten:

Ist die linke Seite einer <-Ungleichung und die rechte Seite einer anderen <-Ungleichung größer als Null, so darf man die beiden Ungleichungen miteinander multiplizieren.

Man beachte die Symmetrie in den Voraussetzungen!

(In den beiden Ungleichungen!)

Noch einmal Rechenregeln für Ungleichungen:

Addition von Ungleichungen:

mit reellen Zahlen:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \;\; a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

mit Ungleichungen:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: \; a \leq b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$$

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: \; a \leq b \text{ und } c < d \Rightarrow a+c < b+d$$

Multiplikation von Ungleichungen:

mit reellen Zahlen:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad \forall c \in \mathbb{R}_+: \quad a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: \; \forall c \in \mathbb{R}: \; a \leq b \text{ und } c \leq o \Rightarrow ac \geq bc$$

mit Ungleichungen:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: \; a \leq b \text{ und } c \leq d \text{ und } b \geq 0 \text{ und } c \geq 0$$
$$\Rightarrow ac \leq bd$$

Das heißt in Worten:

Ist die linke Seite einer $\leq$-Ungleichung und die rechte Seite einer anderen $\leq$-Ungleichung größer als oder zumindest gleich Null, so darf man die beiden Ungleichungen miteinander multiplizieren.

Man beachte die Symmetrie in den Voraussetzungen!

(In den beiden Ungleichungen!)

3.2 Ergänzungen zum Rechnen: Summen- und Produktzeichen

3.2.1 Das Summenzeichen $\sum$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$

$$=: \sum_{i=1}^{14} a_i$$

$$=: \sum_{k=1}^{14} a_k$$

$$=: \sum_{p=1}^{14} a_p.$$

Um lange Summen kurz aufschreiben zu können, verwendet man das Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Der Summationsindex kann umbenannt werden.

Um geschickt rechnen zu können, z.B.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i =?$$

führt man weiter ein:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i := a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n.$$

Falls $n > k$ ist, ist klar, was man unter der Summe versteht.

Falls $n = k$ ist, besteht die Summe nur aus dem Summanden a_k und ist gleich a_k.

Falls $n < k$ ist, ist die Summe leer.

Man vereinbart, dass eine leere Summe gleich Null ist.

Darf man das?

Ja, weil das Summenzeichen in diesem Zusammenhang vorher noch keine Bedeutung hat.

Ist es sinnvoll, die leere Summe zu Null zu definieren?

Ja. Man erreicht dadurch, dass die Rechenregeln für Summen möglichst einfach werden.

3.2.2 Transformation von Summationsindizes

Ist $i = k + 5$, dann ist $k = i - 5$.

Durchläuft i die ganzen Zahlen von $p, p+1, \ldots$ bis q,

so durchläuft k die ganzen Zahlen von $p-5, p-4, \ldots$ bis $q - 5$.

Allgemeiner: $\forall p, r, t \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{i=p}^{p+r} a_i = \sum_{k=p+t}^{p+r+t} a_{k-t}$$

Warum steht nicht da $\forall i, p, r, k, t \in \mathbb{Z}$?

Hier sind i bzw. k Bezeichnungen, die die ganzen Zahlen von p bis $p + r$ bzw. von $p + t$ bis $p + r + t$ durchlaufen.

Die Buchstaben i und k können beliebig (konsistent!) durch andere ersetzt werden.

3.2.3 Einfache Rechenregeln für das Summenzeichen

$$c \cdot (\sum_{i=p}^{q} a_i) = \sum_{i=p}^{q} c \cdot a_i.$$

Was bedeutet das für $p = 1, q = 2$?

$$(\sum_{i=p}^{q} a_i)\cdot(\sum_{i=r}^{s} b_i) = (\sum_{i=p}^{q} a_i)\cdot(\sum_{k=r}^{s} b_k) = \sum_{i=p}^{q}\sum_{k=r}^{s}(a_i \cdot b_k).$$

Was bedeutet das für $p = r = 1, q = s = 2$?

3.2.4 Das Produktzeichen Π

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{14}$$

$$=: \prod_{i=1}^{14} a_i$$

$$
\begin{aligned}
&=: \prod_{k=1}^{14} a_k \\
&=: \prod_{p=1}^{14} a_p.
\end{aligned}
$$

Um lange Produkte kurz aufschreiben zu können, verwendet man das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Der Produktindex kann umbenannt werden.

Um geschickt rechnen zu können, z.B.

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{k-1} a_i} = ?$$

führt man weiter ein:

$$\prod_{i=k}^{n} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Falls $n > k$ ist, ist klar, was man unter dem Produkt versteht.

Falls $n = k$ ist, besteht das Produkt nur aus dem Faktor a_k und ist gleich a_k.

Falls $n < k$ ist, ist das Produkt leer.

Man vereinbart, dass ein leeres Produkt gleich 1 ist.

Darf man das?

Ja, weil das Produktzeichen in diesem Zusammenhang vorher noch keine Bedeutung hat.

Ist es sinnvoll, das leere Produkt zu 1 zu definieren?

Ja. Man erreicht dadurch, dass die Rechenregeln für Produkte möglichst einfach werden.

3.2.5 Transformation von Produktindizes

Ist $i = k + 5$, dann ist $k = i - 5$.

Durchläuft i die ganzen Zahlen von $p, p+1, \ldots$ bis q,

so durchläuft k die ganzen Zahlen von $p-5, p-4, \ldots$

bis $q-5$.

Allgemeiner: $\forall p, r, t \in \mathbb{Z}$:

$$\prod_{i=p}^{p+r} a_i = \prod_{k=p+t}^{p+r+t} a_{k-t}$$

Warum steht nicht da $\forall i, p, r, k, t \in \mathbb{Z}$?

Hier sind i bzw. k Bezeichnungen, die die ganzen Zahlen von p bis $p+r$ bzw. von $p+t$ bis $p+r+t$ durchlaufen.

Die Buchstaben i und k können beliebig (konsistent!) durch andere ersetzt werden.

3.2.6 Einfache Rechenregeln für das Produktzeichen

$$(\prod_{i=p}^{q} a_i)^k = \prod_{i=p}^{q} (a_i^k).$$

Was bedeutet das für $p = 1, q = 2$?

3.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für die Mathematik wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$:

Die reellen Zahlen sind (bezüglich der üblichen Anordnung) **vollständig**, d.h.:

Zerlegt man $\mathbb{R}$ durch einen "Schnitt" in eine "linke Hälfte" L und in eine "rechte Hälfte" R, so hat entweder L ein größtes Element oder R ein kleinstes Element.

Folgen aus dieser tiefliegenden Eigenschaft werden wir verwenden, aber nicht genauer diskutieren.

Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig.