

Einführung in die Stochastik für Lehramt an Gymnasien

AUFGABE 1

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Weiter definieren wir folgende Zufallsvariablen:

$$X_i := \text{„Augenzahl des } i\text{-ten Wurfes“} \quad S := X + Y \quad D := Y - X$$

1. Berechnen sie $E(X_i)$ und $Var(X_i)$ für $i = 1, 2$. Warum gilt $Cov(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$?
2. Bestimmen sie $E(X_i X_j)$ und $Cov(S, D)$ und folgern sie, dass S und D abhängig sind.

AUFGABE 2

Wir betrachten folgendes Modell aus der Biologie: Wir haben eine bestimmte Anzahl an Zellen n gegeben, die wir einer radioaktiven Bestrahlung aussetzen. Eine Zelle überlebt die Bestrahlung mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% nicht. Sie teilt sich in zwei neue Zellen mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/6 * 100\%$ und überlebt die Bestrahlung mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3 * 100\%$. Wir definieren die Zufallsvariablen X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ vermöge

$$X_i := \begin{cases} 0 & i\text{-te Zelle stirbt} \\ 1 & i\text{-te Zelle überlebt} \\ 2 & i\text{-te Zelle teilt sich} \end{cases}$$

1. Berechnen sie $E(Y_n)$, wobei $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$
2. Schätzen sie die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass nach der Bestrahlung von $n = 9000$ Zellen höchstens 5500 Zellen oder mindestens 6500 Zellen am Leben sind.