TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Hartl

Übungen zu
Differentialgeometrie
WS 2007/08
Blatt 5

1. Gegeben sei eine reguläre C^2–Drehfläche Φ in $\mathbb{E}^3$:

$$x(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))^T, (u,v) \in I \times \mathbb{R}(I \subseteq \mathbb{R})$$

mit $f(u) > 0 \;\forall u \in I$, wobei u die Bogenlänge der Meridiankurven von Φ sei.

a) Man berechne die CHRISTOFFEL–Symbole erster und zweiter Art von Φ und zeige, dass sie bis auf die Größen

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = -\Gamma_{221} = ff'$$

bzw.

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{f'}{f},\; \Gamma^1_{22} = -ff'$$

für *jede* Drehfläche Φ identisch verschwinden.

b) Man stelle die Differentialgleichung der Geodätischen von Φ auf.

c) Man beweise den Satz von CLAIRAUT:
Für die Punkte P einer Flächenkurve c von Φ sei r der Radius des Breitenkreises b durch P und α mit $0 < |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ der Winkel, unter dem c und b einander in P schneiden. Dann ist c genau dann eine Geodätische von Φ, wenn $r \cdot \cos\alpha$ längs c konstant ist.

2. Welche Breitenkreise einer regulären C^2-Drehfläche Φ sind Geodätische von Φ?

3. Seien Φ, Ψ zwei Flächen in $\mathbb{E}^n$, die in jedem Punkt einer gemeinsamen Flächenkurve denselben Tangentialraum besitzen. Man zeige unter möglichst schwachen zusätzlichen Voraussetzungen: Die geodätische Krümmung von c auf Φ stimmt in jedem Punkt von c überein mit der geodätischen Krümmung von c auf Ψ.

Aim is not, to cover the material, but to uncover part of it.

(Gefunden im Internet, in einem "Leitfaden für Übungsgruppenleiter" von Marten Feld an der Universität Bonn. Der Leitfaden ist leider nicht mehr verlinkt.)