TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Hartl

Übungen zu
Differentialgeometrie
WS 2007/08
Blatt 3

1. Für eine reguläre W-Punkt-freie C^3-Kurve c ($x : I \to \mathbb{E}^3$) zeige man

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x} \times \ddot{x}|}{|\dot{x}|^3}$$
$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})}{(\dot{x} \times \ddot{x})^2}$$

Man spezialisiere die angegebenen Formeln für den Fall, dass c auf die Bogenlänge s als Parameter bezogen ist.

2. Für eine reguläre C^2-Kurve c ($x : I \to \mathbb{E}^2$) zeige man

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}^1\ddot{x}^2 - \ddot{x}^1\dot{x}^2}{|\dot{x}|^3}$$

Man spezialisiere die angegebenen Formeln für den Fall, dass c auf die Bogenlänge s als Parameter bezogen ist.

3. Die C^ω–2–Fläche Φ' in $\mathbb{E}^3$ sei gegeben durch die Abbildung

$$x : \begin{cases} G' = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3 \\ (u,v) \mapsto x(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Man zeige, dass Φ' regulär, aber nicht einfach ist.
b) Man diskutiere die Parameterkurven von Φ'.
c) Man gebe ein "möglichst großes" Gebiet $\tilde{G} \subseteq G'$ an, so dass $\tilde{\Phi}$, gegeben durch die Restriktion von x auf $\tilde{G}$ eine einfache C^ω–Fläche ist.
d) Man zeige, dass $\tilde{\Phi}$ in einem *einschaligen Drehhyperboloid* liegt.

Sei $\overline{G} := \{(\overline{u}, \overline{v}) : -1 < \overline{u} \cdot \overline{v} < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$f : \begin{cases} \overline{G} \to G \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (\overline{u}, \overline{v}) \mapsto (u,v) = (\operatorname{arsinh} \frac{\overline{u} - \overline{v}}{1 + \overline{u}\overline{v}},\ \arctan \overline{u} + \arctan \overline{v}) \end{cases}$$

e^*) Man bestimme G so, dass f surjektiv ist.
Man zeige, dass f dann eine gleichsinnige zulässige Parametertransformation von Φ ist, wobei Φ gegeben ist durch die Restriktion von x auf G.

f^*) Man zeige, dass die Parameterkurven von $\overline{\Phi}$ mit der Parameterdarstellung $x \circ f$ *geradlinig* sind.

Der Weise zweifelt, der Dumme weiß mit Sicherheit. Und darin liegt ihre Stärke.

Andrzej Majewski