TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Hartl

Übungen zu
Differentialgeometrie
WS 2007/08
Blatt 2

1. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Durch eine C^r–Abbildung $x : I \to \mathbb{E}^n$ sei eine C^r–Kurve c gegeben, so dass für die k–te Ableitung von x nach u gilt:
$$x^{(k)}(u) = 0 \;\; \forall u \in I.$$
Dabei sei k eine feste ganze Zahl mit $1 \leq k \leq r$ und $k \leq n$.
Man zeige: Die Kurve c liegt in einem $(k-1)$–dimensionalen euklidischen Unterraum $\mathbb{E}^{k-1}$ des $\mathbb{E}^n$.

2. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $x : I \to \mathbb{E}^n$ eine C^r–Abbildung, so dass $\{\dot{x}(u),\ \ddot{x}(u)\}$ linear abhängig ist für alle $u \in I$. Folgende Aussagen sollen jeweils bewiesen oder durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden:

    a) Die Kurve c mit der Parameterdarstellung x ist notwendig in einer Geraden enthalten.
    b) Ist x eine C^2–Immersion, so ist die Kurve c in einer Geraden enthalten.

3. Für

    a) $n = 2, c$ regulär
    b) $n = 2, c$ nicht regulär
    c) $n = 3, c$ regulär

    beweise oder widerlege man folgende Behauptung:
    Sind A, B zwei verschiedene Punkte der C^1–Kurve $c \subseteq \mathbb{E}^n$, so besitzt c einen zwischen A und B gelegenen Punkt P mit zur Sehne $[A, B]$ paralleler Tangente.

4. Die Kurve c sei mit $a > 0,\ b > 0$ gegeben durch
$$x : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{E}^2 \\ t & \mapsto \quad x(t) = (a\frac{t^2-1}{t^2+1},\ b\frac{2t}{t^2+1}). \end{cases}$$

    a) Man zeige, dass c eine einfache C^ω–Kurve ist.
    b) Man vergleiche c mit der durch
$$x^* : \begin{cases}]0, 2\pi[& \to \quad \mathbb{E}^2 \\ u & \mapsto \quad x^*(u) = (a\cos u,\ b\sin u). \end{cases}$$
    definierten Kurve $c^* := \phi^*(]0, 2\pi[)$.

"Es hört doch jeder nur, was er versteht."

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832), dt. Dichter