TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Hartl

Übungen zu
Differentialgeometrie
WS 2007/08
Blatt 1

Die Einsteinsche Summenkonvention besagt: Über einen Index, der in einem Produkt zweimal auftritt, einmal als oberer Index, einmal als unterer Index, wird über den Laufbereich dieses Index summiert.

Wir vereinbaren: Der Laufbereich von lateinischen Indizes geht von 1 bis m, der Laufbereich von griechischen Indizes geht von 1 bis n.

1. Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention schreibe man $\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ ohne Verwendung des Summenzeichens.

2. Seien S, T reelle $(n \times n)$–Matrizen mit Komponenten T_j^i und S_j^i, wobei der obere Index der Zeilenindex sei. Weiterhin sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit Komponenten x^i. Mittels der Einsteinschen Summenkonvention gebe man die Produkte $S \cdot T$ und $S \cdot x$, sowie die Spuren von S und $S \cdot T$ an.

3. Seien I, J, H offene Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $J \subseteq H$.
   Seien $f : I \to J$ und $g : H \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Die folgenden Behauptungen widerlege man entweder durch ein Gegenbeispiel, oder man gebe an, aufgrund welcher bekannten Sätze der Analysis sie (jeweils $\forall r \in \mathbb{N}_0$ sowie $r = \infty,\ r = \omega$) gelten:

   a) $f, g \in C^r \Rightarrow g \circ f \in C^r$;
   b) $f, g \circ f \in C^r \Rightarrow g \in C^r$;
   c) $g, g \circ f \in C^r \Rightarrow f \in C^r$.

4. Sei A eine reelle, symmetrische $(n \times n)$–Matrix. Mit der Methode der Lagrange–Multiplikatoren bestimme man das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion

   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^T \cdot A \cdot x$$

   unter der Nebenbedingung $||x|| = 1$.

5. Gegeben sei die C^ω–Kurve $c \subseteq \mathbb{E}^2$ (gespitzte Zykloide):

   $$c : x(u) = (u - \sin u,\ 1 - \cos u)^T,\ u \in \mathbb{R}$$

   a) Besitzt c Doppelpunkte?
   b) Ist c einfach?
   c) Welche Symmetrie(n) besitzt c?

6. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a, b, c : I \to \mathbb{R}^3$ drei C^1–Vektorfunktionen.
Man zeige:

a) $\frac{d}{dt}(a(t) \cdot b(t)) = \dot{a}(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot \dot{b}(t)$,

b) $\frac{d}{dt}(a(t) \times b(t)) = \dot{a}(t) \times b(t) + a(t) \times \dot{b}(t)$,

c) $\frac{d}{dt}\det(a(t), b(t), c(t)) = \det(\dot{a}, b, c) + \det(a, \dot{b}, c) + \det(a, b, \dot{c})$.

7. Sei $m < n \in \mathbb{N}$ und $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x)$, sowie $g : I \subseteq \mathbb{R} \to U,\ t \mapsto g(t)$ C^1–Funktionen, wobei U eine offene, zusammenhängende Menge und I ein offenen Intervall sei.
Dann definiert $I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (f \circ g)(t)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Mittels der Kettenregel berechne man die Tangentenvektoren $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t)$ an diese Kurve komponentenweise.

8. Eine C^r–Kurve $c := \phi(I) \subseteq \mathbb{E}^2$ ist durch die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} I \to \mathbb{E}^2 \\ u \mapsto \phi(u) = X(u) = (x(u), y(u)) \end{cases}$$

gegeben mit

a) $I = \mathbb{R},\ x = a \cdot \cosh u,\ y = b \cdot \sinh u \quad (a > 0,\ b > 0)$;

b) $I = \mathbb{R},\ x = \frac{u^2}{1+u^2},\ y = \frac{u^3}{1+u^2}$ (Zissoide);

c) $I =]0, \pi[,\ x = \cos u,\ y = \sin^2 u$;

d) $I =]0, 2\pi[,\ x = \cos u,\ y = \sin^2 u$;

e) $I =]0, 2\pi[,\ x = \sin u \cdot \cos u,\ y = \sin u$.

(1) Man zeige, dass c eine C^ω–Kurve ist

(2) Besitzt c nichtreguläre Punkte?

(3) Ist c einfach?

(4) Ist c nicht einfach, so gebe man offene Intervalle $I_i \subseteq I$ derart an, dass $C_i := \phi(I_i)$ einfache C^ω–Kurven sind und c bis auf Punkte an Nahtstellen zweier Teilkurven die Vereinigung der Teilkurven c_i ist.

"Es gibt heute viele, die es statt mit Dynamik mit Hektik versuchen."
Autor: Peter Horton (*1941), österr. Komponist, Musiker u. Autor