Differentialgeometrie

Vorlesung (2 + 1) von

Prof. Dr. Johann Hartl

Fakultät für Mathematik

Technische Universität München

Wintersemester 2007/2008

Differentialgeometrie

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie

Theorie

der **Kurven**

in einem umgebenden Raum

der **Flächen**

in einem umgebenden Raum

der Kurven auf Flächen **usw.**

Theorie der **Mannigfaltigkeiten**

Das sind Mengen, die sich "lokal so verhalten", wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Was braucht man für eine Differentialgeometrie?

Einen **Raum**, in dem man differenzieren (und integrieren) kann,

am einfachsten mit Hilfe von Koordinaten(funktionen).

Objekte in diesem Raum (z.B. Kurven und Flächen) mit **geometrischen Eigenschaften**, z.B. Längen, Winkel, Krümmungen,

wobei noch gesagt werden muss, was geometrische Eigenschaften sind:

Invarianten gegenüber gewissen Transformationen.

Die verwendete Sprache und der verwendete Kalkül sind den Problemstellungen anzupassen.

Es gibt verschiedene Differentialgeometrien, z.B.:

elementare Differentialgeometrie =
euklidische Differentialgeometrie

pseudoeuklidische Differentialgeometrie
mit Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie

elliptische Differentialgeometrie =(lokal)=
sphärische Differentialgeometrie

hyperbolische Differentialgeometrie

allgemeiner: **Cayley/Klein-Differentialgeometrien**

Riemannsche Geometrie und **Theorie der Mannigfaltigkeiten**
mit verschiedenen Strukturen

In dieser Vorlesung (bis auf weiteres):

Euklidische Differentialgeometrie

- der Kurven und
- der m-dimensionalen Flächen

in einem n-dimensionalen euklidischen Raum E^n

speziell oft: $n = 3$, $m = 2$

Bezeichnungen:

Der E^n ist ein Raum mit Punkten $X, Y, \ldots, P, Q, \ldots$

Zum E^n gehört ein euklidischer Vektorraum V^n (mit Skalarprodukt) mit Vektoren $v, w, \ldots, x, y, \ldots$

Zu je zwei Punkten $X, Y \in E^n$ gibt es genau einen **Verbindungsvektor** $v \in V^n$:

$$\overrightarrow{XY} = v.$$

Manchmal schreibt man auch

$$\overrightarrow{XY} = Y - X.$$

Es gilt die **Parallelogrammregel**:

$$\forall P, Q, R \in E^n : \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

Es gilt die **Eindeutigkeit der Abtragung von Vektoren**:
Zu jedem Paar (X, v) mit $X \in E^n$, $v \in V^n$ gibt es einen Punkt $Y \in E^n$, so dass gilt:

$$\overrightarrow{XY} = v$$

Zeichnet man in E^n einen Ursprung O aus, so entspricht jedem Punkt $X \in E^n$ ein Vektor $x \in V^n$ mit $x := \overrightarrow{OX}$.

Ist zudem in V^n eine Basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gegeben, wird jeder Punkt in E^n beschrieben durch einen Koordinatenvektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

$(O; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ... **Koordinatensystem** (**KS**)

Achtung: Elemente des V^n kann man addieren und mit Skalaren multiplizieren.

Elemente des E^n kann man nicht addieren und nicht mit Skalaren multiplizieren.

Wählt man in E^n einen **Ursprung** O, so gibt es zu jedem $X \in E^n$ genau ein $x \in V^n$, so dass $\overrightarrow{OX} = x$.

Dann kann man für $X, Y \in E^n$ definieren: $X + Y := Z$ mit $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$

Diese Addition hängt ab von der Wahl des Ursprungs!

Sie ist geometrisch nicht sinnvoll!

Im folgenden sei in der Regel ein kartesisches $x^1x^2\dots x^n$- Rechtskoordinatensystem zugrundegelegt: $(O; b_1, b_2, \dots, b_n)$ mit $O \in E^n$, $b_j \in V^n$ für $j = 1, 2, \dots, n$, $b_j^2 = 1$ für $j = 1, 2, \dots, n$, $b_j b_k = 0$ für $j, k = 1, 2, \dots, n$ und $j \neq k$, $\det(b_1, b_2, \dots, b_n) = +1$.

Ein Punkt X mit Koordinatenvektor $(x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ wird auch mit (x^α) bezeichnet.

Vereinbarung: Griechische Indizex laufen von 1 bis n (wenn nichts anderes gesagt wird).

Vereinbarung: Lateinische Indizex laufen von 1 bis m (wenn nichts anderes gesagt wird).

Vereinbarung: Falls $n = 3$ oder $n = 2$ schreiben wir auch x, y, z oder x, y statt x^1, x^2, x^3 bzw. x^1, x^2.

Bezeichnungen

Das **Kronecker-Symbol**:

$$\delta_{jk} = \delta_j^k = \delta^{jk} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{matrix} j \neq k \\ j = k \end{matrix} \right\}$$

Die verschiedenen Stellungen der Indizes braucht man später wegen der Einsteinschen Summenkonvention.

Die **kanonische Basis** des $\mathbb{R}^n$:

$$e_\alpha := (\delta_{1\alpha}, \delta_{2\alpha}, \ldots, \delta_{n\alpha})^T \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

heißt der α-te **kanonische Basisvektor** des $\mathbb{R}^n$,

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ heißt die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Einsteinsche Summenkonvention

Über einen Index, der in einem Produkt zweimal auftritt, einmal als unterer Index, einmal als oberer Index, wird über seinen Laufbereich summiert (wenn nichts anderes gesagt wird).

Das Summenzeichen wird weggelassen.

Bemerkung: Die Einsteinsche Summenkonvention gilt auch bei Produkten mit nur einem Faktor:

$$a_\alpha^\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k^k$$

Beispiel: Ist $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$, so ist $x = x^\alpha e_\alpha$.

Bemerkung:

$$\text{Bei den } \left\{\begin{array}{l}\text{Koordinaten}\\ \text{Vektoren}\end{array}\right\} \text{ stehen die Indizes } \left\{\begin{array}{l}\text{oben}\\ \text{unten}\end{array}\right\}.$$

Beispiel: Sei $T = (t_\alpha^\beta)$ eine $n \times n$-Bewegungsmatrix bgzl. eines kart. KS im E^n, $b = (b^\beta)$ der Translationsvektor.

(unterer Index: Spaltennummer,
oberer Index: Zeilennummer)

Seien x^α Urbildkoordinaten.

Dann sind

$$y^\beta = t_\alpha^\beta x^\alpha + b^\beta$$

Bildkoordinaten.

(Andere Schreibweise: $y = Tx + b$.)

Bem.: Diese Schreibweise ist verallgemeinerbar auf mehr als zwei Indizes.

Differenzierbarkeit

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine C^r-Abbildung auf I, in Zeichen $f \in C^r(I)$, wenn gilt: f ist r-mal differenzierbar und die r-te Ableitung $f^{(r)}$ von f ist stetig $(r \in \mathbb{N})$.
Außerdem.
$r = 0 \ldots f$ stetig
$r = \infty \ldots f$ beliebig oft stetig differenzierbar
$r = \omega \ldots f$ analytisch (= in eine gegen f konvergente Potenzreihe entwickelbar)

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $X : I \longrightarrow E^n$ mit $X(u) = (x^\alpha(u))$ (bzg. eines festen KS in E^n) heißt C^r-Abbildung auf I, in Zeichen $X \in C^r(I)$, wenn gilt: x^α ist eine C^r-Abbildung.

Noch einmal: **Differenzierbarkeit**

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $X : G \to E^n$ mit $X(u^k) = (x^\alpha(u^k))$ (bzg. eines festen KS in E^n) heißt C^r-Abbildung auf G, in Zeichen $X \in C^r(G)$, wenn gilt: Alle r-ten partiellen Ableitungen von x^α existieren und sind stetig.